

П.3 Аппроксимация с помощью интерпол-х полиномов

10/03

$$f(x), \quad \frac{df}{dx}(c)?, \quad [a, b]$$

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n, \quad x_i \in [a, b], \quad i = \overline{0, n}$$

$f(x) \sim L_n(x)$ — интерполяц. многочлен на x :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} f(x_i) \quad \text{— точен, if } f = \text{полином степени } m \leq n$$

$$\frac{df}{dx}(c) \sim \frac{d}{dx} L_n(x) \Big|_{x=c}$$

! Зам В кач-ве интерпол. ф-ции может выступать $\forall$ ф-ция

Пример $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h$
 $\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $f_0, \quad f_1, \quad f_2$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-h)(x-2h)}{2h^2} f_0 - \frac{(x-2h)x}{h^2} f_1 + \frac{x(x-h)}{2h^2} f_2$$

$$f'(x_0) \sim L_2'(x_0) = f_0 \frac{1}{2h^2} [x-2h+x-h] \Big|_{x=0} - f_1 \frac{1}{h^2} [x-2h+x] \Big|_{x=0} + f_2 \frac{1}{2h^2} [x-h+x] \Big|_{x=0} =$$

$$= f_0 \left(\frac{-3h}{2h^2} \right) + f_1 \frac{2h}{h^2} + f_2 \left(\frac{-h}{2h^2} \right)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{2} f_0 + 2f_1 - \frac{1}{2} f_2 \right] = \frac{1}{2h} [-3f_0 + 4f_1 - f_2]$$

$$\frac{df}{dx}(x_1) \sim L_2'(x_1) = \frac{1}{2h^2} f_0 [x-2h+x-h] \Big|_{x=h} - \frac{f_1}{h^2} [x-2h+x] \Big|_{x=h} + f_2 \frac{1}{2h^2} [x-h+x] \Big|_{x=h} =$$

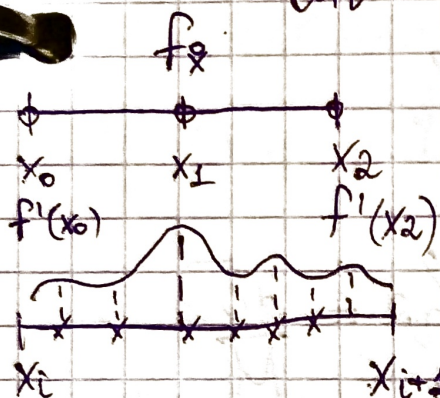
$$= \frac{1}{2h^2} f_0 (-h) - \frac{1}{h^2} f_1 \cdot 0 + \frac{1}{2h^2} h f_2 = \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{f_2 - f_0}{2h} - \text{центр. разность}$$

$$\frac{df}{dx}(x_2) \sim L_2'(x_2) = \frac{1}{2h^2} f_0 \cdot h - \frac{1}{h^2} f_1 \cdot 2h + \frac{1}{2h^2} f_2 \cdot h$$

$$f_2 \cdot 3h$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h} [f_0 - 4f_1 + 3f_2]$$



← компактный шаблон

П.4 Корректность числ. дифференцирования

$$f'(x) \sim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tilde{f}'_x$$

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) - \frac{1}{h} [f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi) - f(x)] = -\frac{h}{2} f''(\xi)$$

$$f'(x_i) - \frac{\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_i)}{h} = f'(x_i) - \frac{f_{i+1} + \delta_{i+1} - f_i - \delta_i}{h}$$

// $\tilde{f}$ — фун-я с погрешностью
 $\tilde{f}_i = f_i + \delta_i$ //

$$= \frac{f_i - \delta_i}{h} - f'(x_i) - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h} =$$

$$= -\frac{h}{2} f''(\xi_i) - \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h}$$

$$\psi_i = -\frac{h}{2} \cdot f''(\xi_i) - \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h}$$

$$\frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \text{ if } \delta_{i+1} - \delta_i = \bar{O}(h)??$$

$$\square |f''(\xi_i)| \leq M, |\delta_i| \leq \delta, i=0, 1, \dots$$

$$|\psi_i| \leq \frac{h}{2} M + \frac{2\delta}{h} \rightarrow \min$$

$$\frac{M}{2} - \frac{2\delta}{h^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{M}{2} = \frac{2\delta}{h^2} \Leftrightarrow h^2 = \frac{4\delta}{M}$$

- такой шаг дает $\rightarrow \min$ погрешность

✓

Вывод: 1) $\exists$ опт. значение h при $\forall$ погреш-ти;

2) $\delta_{i+1} - \delta_i = \bar{O}(h) \Rightarrow$ сх-ть при $h \rightarrow 0$ есть

Глава 4. Методы Рунге-Кутты

П.1. Общий вид

Решает ЭК y' / ОДУ: $\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u), t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ // На самом деле это тоже самое!

Решаем $\frac{d\vec{u}}{dt} = f(\vec{u})$. Введем сетку: $t_n = \tau n, n=0, 1, 2, \dots, \tau$ - шаг

1) На отрезке $[t_n, t_{n+1}]$ исход. задача эквив.

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t)) dt$$

2) Сделаем замену перемен-х, введем $\theta = \frac{t - t_n}{\tau} \Leftrightarrow t = t_n + \tau\theta, 0 < \theta < 1$

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \tau \int_0^1 f(u(t(\theta))) d\theta$$

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \tau \int_0^1 f(\hat{u}(\theta)) d\theta, \hat{u}(\theta) = u(t(\theta))$$

3) Введем величины $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s \leq 1$

Интеграл $\tau \int_0^1 f(\hat{u}(\theta)) d\theta$ заменим квадратурной ф-ной по т. $\theta_i, i=1, s: \tau \int_0^1 f(\hat{u}(\theta)) d\theta \approx \tau \sum_{i=1}^s b_i f(\hat{u}(\theta_i))$ // b_i - веса квадратурной ф-ны //

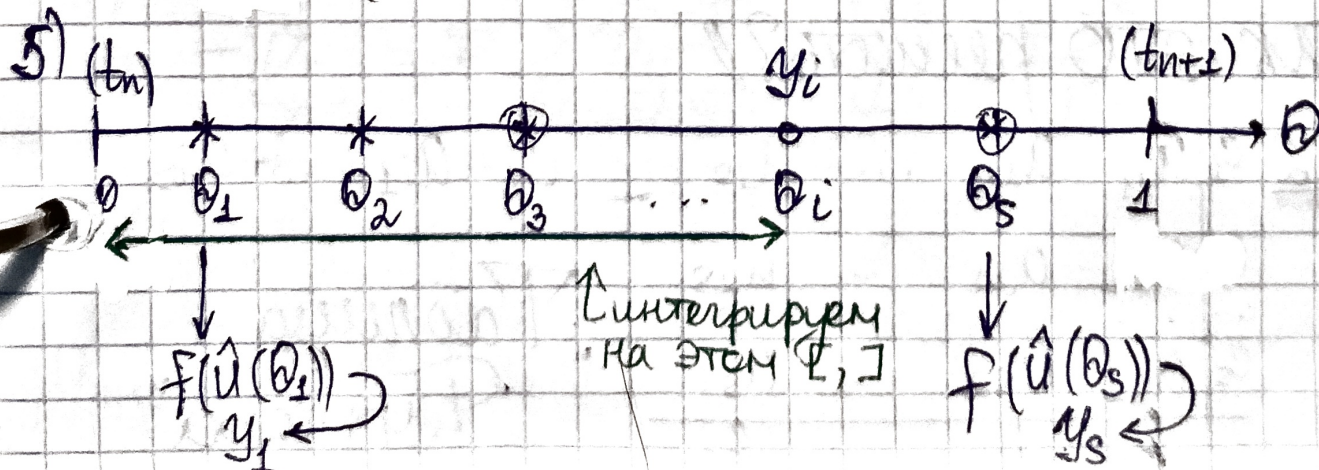
4) $u(t_n) \rightarrow u_n$
точн. числ. приближ.

$$f_n = f(u_n)$$

$$y_i = u_n(t(\theta_i)) - \text{знач-е приближ. реш-я в т.т, соответствующей узлу квадратур. ф-ны}$$

$$u_{n+1} - u_n = \tau \sum_{i=1}^s b_i f(y_i)$$

$$y_i = u(t_n + \tau\theta_i)$$



$$y_i - u_n = \tau \int_0^{b_i} f(\hat{u}(\theta)) d\theta - \text{это интерпретируем}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(u(t(\theta))) \text{ на } [t_n, t_{n+\tau b_i}]$$

$\int_0^{b_i}$ будем вычислять по квадрат. ф-ле по тем же m b_i

$$\tau \int_0^{b_i} f(\hat{u}(\theta)) d\theta \approx \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j)$$

6) Ф-ны Ф-К:
$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \tau \sum_{i=1}^s f(y_i) b_i \\ y_i - u_n = \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j), \\ i = \overline{1, s} \end{cases}$$

Зам.1 $y_i - u_n = \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j), i = \overline{1, s}$

$$y_1 - u_n = \tau [a_{11} f(y_1) + a_{12} f(y_2) + \dots + a_{1s} f(y_s)],$$

$$y_2 - u_n = \tau [a_{21} f(y_1) + a_{22} f(y_2) + \dots + a_{2s} f(y_s)],$$

$$y_s - u_n = \tau [a_{s1} f(y_1) + a_{s2} f(y_2) + \dots + a_{ss} f(y_s)]$$

// Как это решить?

Зам.2 $c_i | \begin{matrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{is} \end{matrix} \quad c_i = a_{i1} + \dots + a_{is}$

c_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2s}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\dots$	a_{ss}
	b_1	b_2	$\dots$	b_s

Таблица
"бутрепа"

Зам. 3 $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ (из усл. точности $g/f=1$)

Зам. 4 $\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i = \theta_i$

$\int_0^{\theta_i} f(\tau) d\tau = \theta_i$, $y_i = u_n + \tau \theta_i$

Терминология: $\exists a_{ij} = 0, j \geq i$ — явные методы (не требуют усилений)

$\exists a_{ij} \neq 0$ при $i > j$ — диагонально неявный метод

Все остальные методы — неявные

$\vec{u}'(x) = f(\vec{u})$

$u'(x) = f(t, u)$

$\vec{u} = (u(t), v(t))$; $u(0) = u_0$; $v(0) = 0$

$\vec{f} = (f(\vec{u}(t)), 1)$

$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u}) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = f(\vec{u}(t)) \\ \frac{dv}{dt} = 1 \Rightarrow v = t \end{cases}$

$y_{v_i} - \underbrace{v_n}_{t_n} = \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \underbrace{f_v(y)}_{=1} = \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} = \tau c_j$

$y_{v_i} = t_n + \tau c_i$

$u_{n+1} - u_n = \tau \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + \tau c_i, y_i)$

$$y_i - U_h = T \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_h + \tau \theta_j, y_j), \quad i = \overline{1, S}$$